学校编码：10384 分类号________密级_____
学号：19020091152245 UDC_____________________

厦门大学

硕 士 学 位 论 文

# 马尔可夫体制转换随机波动模型和收益波动率

# Markov Switching Stochastic Volatility Model and Return Volatility

蔡 茜

指导教师姓名： 黄荣坦 副教授
专 业 名 称：概率论与数理统计

论文提交日期：2012 年 月 日
论文答辩时间：2012 年 月 日
学位授予日期：

答辩委员会主席：_________
评 阅 人：_________

2012 年 月

# 厦门大学学位论文原创性声明

本人呈交的学位论文是本人在导师指导下,独立完成的研究成果。本人在论文写作中参考其他个人或集体已经发表的研究成果，均在文中以适当方式明确标明，并符合法律规范和《厦门大学研究生学术活动规范（试行）》。

另外,该学位论文为(　　　　　　　　　　　　　　　)课题(组)的研究成果，获得（　　　　　　　　　）课题（组）经费或实验室的资助，在（　　　　　　　　　）实验室完成。(请在以上括号内填写课题或课题组负责人或实验室名称，未有此项声明内容的，可以不作特别声明。)

声明人（签名）：

年　　月　　日

# 厦门大学学位论文著作权使用声明

本人同意厦门大学根据《中华人民共和国学位条例暂行实施办法》等规定保留和使用此学位论文，并向主管部门或其指定机构送交学位论文（包括纸质版和电子版），允许学位论文进入厦门大学图书馆及其数据库被查阅、借阅。本人同意厦门大学将学位论文加入全国博士、硕士学位论文共建单位数据库进行检索，将学位论文的标题和摘要汇编出版，采用影印、缩印或者其它方式合理复制学位论文。

本学位论文属于：

（　　）1.经厦门大学保密委员会审查核定的保密学位论文，于　　年　　月　　日解密，解密后适用上述授权。

（　　）2.不保密，适用上述授权。

（请在以上相应括号内打“√”或填上相应内容。保密学位论文应是已经厦门大学保密委员会审定过的学位论文，未经厦门大学保密委员会审定的学位论文均为公开学位论文。此声明栏不填写的，默认为公开学位论文，均适用上述授权。）

声明人（签名）：

年　　月　　日

# 摘 要


随机波动(Stochastic Volatility, SV)模型被认为是模拟时变波动率的有效工具。然而，如果波动过程存在状态的改变而被忽视时，该模型的持续性参数总是被过度的估计。为了更好的解释波动持续性并且能够抓住波动过程的变化，人们提出了马尔可夫体制转换随机波动模型(So，Lam and Li(1998)，Smith(2002)，Kalimipalli and Susmel(2004)，Hwang，Satchell，and Pereira(2007)，Carvalho and Lopes (2007)，Rios and Lopes(2010))。

本文中，我们使用允许体制的改变发生在常系数项和波动率扰动项方差上的马尔可夫体制转换随机波动模型，研究上证综合指数日收益波动率的时变特征。对于这个模型的参数估计一直以来都是集中在 QML 方法和 MCMC 方法。本文主要的贡献是：我们提出针对该模型的参数和体制的序贯蒙特卡洛(SMC)抽样算法，并给出具体的抽样步骤，得到了上证综合指数日收益波动率的时变特征。


**关键词：**体制转换随机波动模型；序贯蒙特卡洛；贝叶斯分析

# Abstracts

Over the years stochastic volatility (SV) models have been considered a useful tool for modeling time-varying variances. However, the persistence could be overestimated if structural changes in the volatility process were ignored in the model. In order to explain volatility persistence and capture changes in volatility , people propose Markov switching stochastic volatility model (So, Lam and Li(1998), Smith(2002), Kalimipalli and Susmel(2004), Hwang, Satchell,, and Pereira(2007)，Carvalho and Lopes (2007), Rios and Lopes(2010)) .

In this paper, we use the MSSV model with changes of the regime occurred in the constant coefficient and the volatility disturbance's variance. We do some research on the Shanghai Composite Index return volatility's time-varying characteristics. For the estimations of the parameters of this model has been concentrated in the QML method and the MCMC method. The main contribution of this paper is that we propose a Sequential Monte Carlo (SMC) sampling algorithm to the parameters and regimes of this model, and we give specific steps of sampling and get the time-varying characteristics of the Shanghai Composite Index return volatility.

**Key words:** Markov switching stochastic volatility model; Sequential Monte Carlo; Bayesian analysis

# 目 录

# Contents

# 第一章 绪 论

金融市场的波动率一般用收益率的条件方差来度量，成为度量风险的一种重要工具。波动率的估计广泛应用在资产组合理论与期权定价理论等各种模型中，起着相当重要的作用。从 Mandelbrot(1963)和 Fama (1965)的研究开始，研究者们发现收益率具有尖峰厚尾的分布特征，如果考虑时变波动率将会提高参数估计的效率。随后，构造时变波动率模型便成为一个研究方向。由 Engle(1982)和 Bollerslev(1986)等人提出的 GARCH 类模型，以及由 Taylor(1982)提出的随机波动(SV)类模型，构成波动率研究中运用最为广泛的两类模型。

在 GARCH 模型中，条件方差写做前期误差的函数，但随机波动模型是假设条件方差服从某个随机过程。研究证明，SV 模型在一定程度上克服了 GARCH 类模型的缺陷。同时，在随机波动模型研究中发现，如果波动率方程中忽略波动存在体制转换现象时，那么模型中的持续性参数就会被高估。So，Lam 和 Li(1998)主张用带有马尔可夫体制转换的随机波动模型根据经济力量来测量波动的起伏。Kalimipalli 和 Susmel(2004)表明使用状态转换 SV 模型的短期利息，性能比单一状态 SV 模型和 GARCH 类模型要好很多。这种模型能够很好的解释波动持续性，也可以根据体制的改变抓住市场或政策改变对金融市场的影响。

然而，由于在 SV 类模型中引入了潜在的时间序列过程，因此似然函数依赖于高维积分，这样使得随机波动模型的参数估计十分困难，引入了体制转换的随机波动模型的参数估计则更难。目前，已经有很多关于估计马尔可夫转换模型的方法，包括拟极大似然估计法（Chib(1996)、James 等(1996)、Elliott 等(1998)、Elliott 和 Malcolm(2008)）和马尔可夫链蒙特卡洛(MCMC)方法（Fruhwirth 和 Schnatter(2001)、Hahn 等(2010)、Kalimipalli 和 Susmel(2004)）。最近几年，很多研究者开始关注一种基于序贯蒙特卡洛(SMC)的滤波算法进行参数估计，这是一种应用蒙特卡洛仿真策略来进行参数在线估计的方法。Fearnhead 和 Clifford(2003)、Carvalho 和 Lopes(2007)等利用 SMC 方法来估计体制转换随机波动模型，还有 Rios 和 Lopes(2010)利用扩展 LiuWest 滤波对 MSSV 模型的参数进行估计，得到比 LiuWest 滤波更好的估计效果。MCMC 方法的不足之处在于，其对参数的分量是逐个进行抽样的，分量之间的相关性会使其收敛速度很慢。与

MCMC 方法相比，SMC 方法更方便，收敛速度更快。

中国股票市场是一个新兴的、制度不完善的市场，更容易受到制度和政策消息的影响，有着明显的周期性和阶段特征。以往对波动体制的划分或过于主观，或者虽然客观却较为保守且割裂历史。对中国股市进行实证研究方面，张世英等(2001)提出了扩展的 SV 模型对深圳股票市场的波动性进行了实证研究，使用蒙特卡洛估计方法。沈根祥(2003)用 GARCH 模型和随机波动模型分别对股票序列进行模拟，发现 SV 模型效果更好，并采用广义矩估计方法估计参数。苏卫东，张世英(2003)用变截距 SV 模型对上证指数收益序列进行了实证分析，发现波动持续性参数被高估，因此他们认为上证指数收益波动率过程存在体制的改变。朱慧明(2008)利用厚尾 SV 模型，基于 MCMC 方法进行参数估计，研究表明我国股市具有很强的波动持续性。

本文中，我们使用体制转换随机波动模型来研究上证综合指数日收益率波动序列，允许体制的改变发生在常系数项$\alpha$和波动率扰动项的方差$\sigma^2$上，并用序贯蒙特卡洛(SMC)方法对模型的参数进行估计，得到了上证综合指数日收益波动率的时变特征。本文的结构安排如下：第二章给出体制转换随机波动模型，并对这类模型进行贝叶斯分析；第三章给出体制转换随机波动模型的参数估计方法，这里主要基于 SMC 方法，在 Lopes(2007)的基础上给出在常系数$\alpha$和波动率扰动项方差$\sigma^2$上存在体制转换的随机波动模型的序贯蒙特卡洛抽样方法；第四章，我们分别将三组模型运用于上证综合指数日收益率序列进行模拟分析，并进行模型的比较；第五章对全文进行了总结。

# 第二章 体制转换随机波动模型

## 2.1 体制转换均值模型

在宏观经济中，某个事件引起的“蝴蝶效应”可能会使经济系统从一个体制转换到另一个体制，这些事件可能是某项政策的出台、股市的泡沫、楼市的泡沫、战争等等。当这种改变发生时，用来模拟数据特征的模型也要随之改变。譬如，我们知道宏观经济存在周期性，会在扩张期和紧缩期之间相互转换，这两种时期具有不同的经济行为，因此需用不同的模型来刻画。

假设 $y_t$ 为某经济数据的收益率，在扩张时期服从下列形式：

$$y_t-\mu_1=\phi(y_{t-1}-\mu_1)+\varepsilon_t \tag{2.1}$$

在紧缩时期，均值水平必然变化，那么采用另外一种形式更合适：

$$y_t-\mu_2=\phi(y_{t-1}-\mu_2)+\varepsilon_t \tag{2.2}$$

我们可以将上述两种模型合并用一个模型来表示：

$$y_t-\mu_{s_t}=\phi(y_{t-1}-\mu_{s_t})+\varepsilon_t\text{，}\quad S_t\text{=1 或 2} \tag{2.3}$$

式(2.3)就是 Hamilton(1989)提出的马尔可夫体制转换(Markov-Switching Regime，MSR)自回归模型。由于体制的转换并不是完全确定的，也就是说我们并不知道体制发生变化的时间，所以假定某时刻所处的体制状态是由不可观测的变量 $S_t$ 来控制是合理的。通常假定 $S_t$ 服从 $K$ 状态遍历的且不可约的齐次马尔可夫链，其转移概率如下：

$$P(S_{t+1}=j\,|\,S_t=i)=p_{ij}\quad i,j=1,2,\cdots,K \tag{2.4}$$

用转移概率矩阵来表示如下：

$$P=\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1k} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2k} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ p_{k1} & p_{k2} & \cdots & p_{kk} \end{pmatrix} \tag{2.5}$$

Hamilton(1990)用 MSR 模型对美国 GDP 增长率序列进行了实证分析，得到了与美国经济研究局给出的经济周期相近的结果。随后 MSR 模型被广泛的应用于各个领域，并被推广到其他模型中。如 Engel 和 Hamilton(1990)对汇率序列进行

了实证分析；Mark 等人(1990)对股票收益序列进行实证分析；Diebold 等人(1994)推广了该模型，允许转移概率随时间变化；Kim(1994)提出体制转换状态空间模型。

## 2.2 标准随机波动模型

SV 模型是由 Clark(1973)在描述证券收益率和交易量的联合分布时引入的。后来，Hull 和 White(1987)发展得到连续 SV 模型，他们采用几何布朗运动将 Black-Scholes 公式推广到时变波动率的情形。设 $P(t), t=1,2,\cdots,T$ 为资产价格变量， $P(t)$ 满足下列随机微分方程：

$$\begin{cases} dP(t) = rP(t)dt + \sigma(t)P(t)dB_p \\ d\sigma^2(t) = \theta\sigma^2(t)dt + \xi\sigma^2(t)dB_\sigma \end{cases} \tag{2.6}$$

其中 $B_p, B_\sigma$ 为标准布朗运动，后一个方程表示价格的波动过程，$\sigma(t)$ 按几何布朗运动变化。上述方程(2.6)的解被称为连续 SV 模型。

在实证研究中，我们常采用的是离散形式的随机波动模型。对连续模型进行离散化，取时间间隔 $\Delta_t = 1$，经过变换后得到离散形式的 SV 模型：

$$y_t = \exp(h_t / 2)\varepsilon_t \tag{2.7}$$

$$h_t = \alpha + \phi h_{t-1} + \sigma\eta_t \tag{2.8}$$

如果用状态空间的形式，可将上述(2.8)式看成转移方程，$h_t$ 是状态变量。相对应的，把等式(2.7)看作观测方程，将(2.7)式两边平方再取对数，得到

$$\log y_t^2 = h_t + \xi_t \tag{2.9}$$

这里 $\xi_t = \log\varepsilon_t^2$。

## 2.3 常系数 $\alpha$ 存在体制转换的随机波动模型

在 So，Lam 和 Li(1998)的文章中定义了常数项带有马尔可夫体制转换的随机波动(Markov switching stochastic volatility, MSSV)模型。假定 $S_t \in \{1,2,...,K\}$ 是不可观测的离散随机变量。$K$ 个状态构成一阶马尔可夫过程，我们可以写出转移矩阵：

$$\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1k} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2k} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ p_{k1} & p_{k2} & \cdots & p_{kk} \end{pmatrix} \tag{2.10}$$

这里 $p_{ij}=\Pr(s_t=j|s_{t-1}=i)$，且 $\sum_{j=1}^{K}p_{ij}=1, i=1,2,\cdots,K$. 状态变量 $S_t$ 代表不同的体制。类似于 Hamilton(1989)对自回归条件均值过程的思想，第二个等式改为：

$$\begin{aligned} h_t &= \alpha_{s_t}+\phi h_{t-1}+\sigma\eta_t \\ \alpha_{s_t} &= \gamma_1+\sum_{j=2}^{K}\gamma_j I_{jt} \end{aligned} \tag{2.11}$$

当 $S_t\geq j$ 时，$I_{jt}=1$。等式(2.7), (2.8)和(2.11)一起称为 $K$ 状态马尔可夫体制转换随机波动模型，记做 $MSSV_\alpha$ 模型。

## 2.4 常系数 $\alpha$ 和波动扰动项方差 $\sigma^2$ 存在体制转换的随机波动模型

在 So 等人(1998)的基础上，Hwang 等人(2007)提出一种新的体制转换随机波动模型，我们称之为 $MSSV_{(\alpha,\sigma)}$ 模型。这里我们主要讨论两体制的情形，将其表示成状态空间形式如下：

$$y_t=\exp(h_t/2)\varepsilon_t \tag{2.12}$$

$$h_t=\alpha_{s_t}+\phi h_{t-1}+\sigma_{s_t}\eta_t \tag{2.13}$$

$$\alpha_{S_t}=\alpha_1+\alpha_2(S_t-1) \tag{2.14}$$

其中 $\alpha_2>0$，状态 $S_t$ 的取值为 1 或 2，服从两状态一阶马尔可夫过程。

对于波动水平和扰动方差的体制转移随机波动模型来说，当 $\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$ 时，该模型就是波动水平的体制转换随机波动模型，因此，$MSSV_\alpha$ 模型可以看作 $MSSV_{(\alpha,\sigma)}$ 模型的特殊情况。

## 2.5 体制转换随机波动模型的贝叶斯分析

本文中皆以 $y_t$ 表示观测数据，作为模型的因变量，$h_t$ 表示对数波动率。

假设参数空间为 $\Theta=(\alpha^{'},\phi,\sigma_1^2,\sigma_2^2,p_{11},p_{22})$，$\alpha=(\alpha_1,\alpha_2)^{'}$，状态变量 $\Phi=(H,S)$，

$H_t=\{h_1,...,h_t\}$，而且 $H=H_T$， $S_t=\{S_1,...,S_t\}$ 且 $S=S_T$，观察变量 $Y_t=\{y_1,...,y_t\}$ 且 $Y=Y_T$。

模型的后验密度为：

$$\begin{aligned}p(\Theta,\Phi|Y)&=p(\Theta,H,S|Y)\propto p(Y|\Theta,H,S)p(\Theta,H,S)\\&\propto p(Y|\Theta,H,S)p(H|\Theta,S)p(S|\Theta)p(\Theta)\end{aligned}\tag{2.15}$$

其中：

$$p(Y|\Theta,H,S)=p(Y|H)=\prod_{t=1}^{T}p(y_t|h_t)=\prod_{t=1}^{T}\frac{1}{\sqrt{2\pi e^{h_t}}}\exp\left(-\frac{y_t^2}{2e^{h_t}}\right)\tag{2.16}$$

$$\begin{aligned}p(H|\Theta,S)&=p(H|\Theta_{-\{p_{11},p_{22}\}},S)=\prod_{t=1}^{T}p(h_t|\alpha,\phi,\sigma_1^2,\sigma_2^2,s_t)\\&=\prod_{t=1}^{T}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{S_t}}\exp\left(-\frac{(h_t-\alpha_{S_t}-\phi h_{t-1})^2}{2\sigma_{s_t}^2}\right)\end{aligned}\tag{2.17}$$

注意到 $S$ 只依赖于 $p_{11},p_{22}$，所以有：

$$p(S|\Theta)=p(S|p_{11},p_{22})=\prod_{t=1}^{T}p(S_{t+1}|S_t,p_{11},p_{22})=p_{11}^{n_{11}}(1-p_{11})^{n_{12}}p_{22}^{n_{22}}(1-p_{22})^{n_{21}}\tag{2.18}$$

其中 $n_{ij}$ 表示从状态 $i$ 转移到状态 $j$ 的数目。这个结果是根据 $S$ 的马尔可夫性质得到的。方程(2.15)中的最后一项 $p(\Theta)$ 为参数的先验密度，所有参数都可以直接获得对应的共轭先验密度，表示如下：

$$p(\Theta)=p(\alpha)p(\phi)p(\sigma_1^2)p(\sigma_2^2)p(p_{11})p(p_{22})\tag{2.19}$$

# 第三章　体制转换随机波动模型的参数估计

## 3.1 引言

随机波动类模型的参数估计主要有两种，一种是伪极大似然估计(Quasi Maximum Likelihood，QML)方法，这一方法是由 Ruiz(1994)完成的；另一种是蒙特卡洛(Monte Carlo，MC)方法：包括马尔可夫链蒙特卡洛(Markov Chain Monte Carlo，MCMC)方法和序贯蒙特卡洛(Sequential Monte Carlo，SMC)方法。基于 Gibbs 抽样的随机波动模型的 MCMC 算法，在张世英等人所著的《协整理论与波动模型》（第二版，2009）中有详细的描述。本文主要探讨体制转换随机波动模型的 SMC 估计方法。

## 3.2 序贯蒙特卡洛估计

近年来，很多研究者开始关注一种基于序贯蒙特卡洛(Sequential Monte Carlo, SMC)方法的滤波算法，一种应用蒙特卡洛仿真策略来解决在线估计的方法。这种方法可以递推产生一列带有权值的样本，也就是所谓的“粒子”(Particle)来表示状态变量或者参数的后验概率分布，以此来进行贝叶斯推断。

这种方法首次是由 Handschin 和 Mayne(1969)提出，经过 Gordon 等人(1993)的改进以后变得流行起来，之后，蒙特卡洛方法的各种版本出现在文献中并冠以不同的名字，比如 Gordon 等人(1995)提出的 Bootstrap 滤波，Liu 和 West(2001)提出的 LW 滤波，Storvik 等(2002)提出的 Storvik 滤波，Carvalho(2010)提出粒子学习(Particle Learning)等等。至此，“粒子滤波”(Particle Filter，PF)通常也作为序贯蒙特卡洛方法的同义词出现在文献中。

### 3.2.1 粒子滤波

粒子滤波(Particle Filtering, PF)算法，是序贯蒙特卡洛方法(SMC)在状态空间模型中的应用，更容易理解为重要性抽样的延伸。首先，回顾一下重要性抽样(Important Sampling, IS)。

假设我们感兴趣的是估计期望值

$$E_{\pi}(f(X))=\int f(x)\pi(x)dx \tag{3.1}$$

如果密度 $g(\cdot)$ 满足当 $g(x)=0$ 推出 $\pi(x)=0$，则称之为一个重要性密度。此时有

$$E_{\pi}(f(X))=\int f(x)\frac{\pi(x)}{g(x)}g(x)d \cancel{x} E_g(f(X)\tilde{\omega}(X)) \tag{3.2}$$

这里 $\tilde{\omega}(x)=\pi(x)/g(x)$，称为重要性函数。这样，可以通过从密度 $g$ 中产生 $N$ 个样本得到估计值

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}f(x^{(i)})\tilde{\omega}(x^{(i)})\approx E_{\pi}(f(X)) \tag{3.3}$$

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\tilde{\omega}(x^{(i)})\approx 1 \tag{3.4}$$

同时可以得到

$$E_{\pi}(f(X))\approx\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}f(x^{(i)})\tilde{\omega}(x^{(i)})\approx\frac{\sum_{i=1}^{N}f(x^{(i)})\tilde{\omega}^{(i)}}{\sum_{i=1}^{N}\tilde{\omega}^{(i)}}=\sum_{i=1}^{N}f(x^{(i)})\omega^{(i)} \tag{3.5}$$

这里将标准化权重 $\omega^{(i)}=\tilde{\omega}^{(i)}/\sum_{j=1}^{N}\tilde{\omega}^{(j)}$，因此，样本 $\left\{x^{(1)},...,x^{(N)}\right\}$ 带有相应权重值 $\left\{\omega^{(1)},...,\omega^{(N)}\right\}$ 可以看作目标密度函数 $\pi$ 的离散估计。换句话说，如果把 $\delta_x$ 记做 $x$ 处的单位质量，令

$$\hat{\pi}=\sum_{i=1}^{N}\omega^{(i)}\delta_{x^{(i)}} \tag{3.6}$$

那么可以有 $\hat{\pi}\approx\pi$。

在滤波应用中，目标分布随着时间变化，参数后验分布从 $\pi(h_{0:t-1}|y_{1:t-1})$ 移动到 $\pi(h_{0:t}|y_{1:t})$。注意到前者不是后者的边缘分布。对于每个时间 $t$，令 $\hat{\pi}_t(h_{0:t}|y_{1:t})$ 表示 $\pi(h_{0:t}|y_{1:t})$ 的近似。这个更新过程由两个步骤组成：(1)对于每个已得到的 $h_{0:t-1}^{(i)}$，抽取额外的成分 $h_t^{(i)}$ 以获得 $h_{0:t}^{(i)}$；(2)更新权重 $\omega_{t-1}^{(i)}$ 到 $\omega_t^{(i)}$。加权点 $(h_t^{(i)},\omega_t^{(i)})$，$i=1,...,N$，作为 $\hat{\pi}_t$ 的离散近似。对于每个时刻 $t$，令 $g_t$ 作为产生 $h_{0:t}$ 的重要性密度，满足下列形式：

$$g_t(h_{0:t}|y_{1:t})=g_{t|t-1}(h_t|h_{0:t-1},y_{1:t})g_{t-1}(h_{0:t-1}|y_{1:t-1}) \tag{3.7}$$

其中的 $g_{t|t-1}$ 称为重要转移密度。

接下来再看一下权重值的更新过程，为了记号简单，先省略上角标：

$$\begin{aligned}\omega_t &\propto \frac{\pi(h_{0:t}\left|y_{1:t}\right.)}{g_t(h_{0:t}\left|y_{1:t}\right.)} \propto \frac{\pi(h_{0:t}, y_t\left|y_{1:t-1}\right.)}{g_t(h_{0:t}\left|y_{1:t}\right.)} \\ &\propto \frac{\pi(h_t, y_t\left|h_{0:t-1}, y_{1:t-1}\right.)\pi(h_{0:t-1}\left|y_{1:t-1}\right.)}{g_{t|t-1}(h_t\left|h_{0:t-1}, y_{1:t}\right.)g_{t-1}(h_{0:t-1}\left|y_{1:t-1}\right.)} \\ &\propto \frac{\pi(y_t\left|h_t\right.)\pi(h_t\left|h_{t-1}\right.)}{g_{t|t-1}(h_t\left|h_{0:t-1}, y_{1:t}\right.)}\omega_{t-1}\end{aligned} \tag{3.8}$$

因此对于每个 $i$，在从 $g_{t|t-1}(h_t\left|h_{0:t-1}^{(i)}, y_{1:t}\right.)$ 抽取 $h_t^{(i)}$ 后，可计算非标准权重

$$\tilde{\omega}_t^{(i)} = \frac{\pi(y_t\left|h_t^{(i)}\right.)\pi(h_t^{(i)}\left|h_{t-1}^{(i)}\right.)}{g_{t|t-1}(h_t^{(i)}\left|h_{0:t-1}^{(i)}, y_{1:t}\right.)}\omega_{t-1}^{(i)} \tag{3.9}$$

标准化的权重值为 $\omega_t^{(i)} = \tilde{\omega}_t^{(i)} / \sum_{j=1}^{N} \tilde{\omega}_t^{(j)}$ 。

在实践中，常常会出现一种情况，就是在一些步更新之后有几个粒子具有很大的权重，而剩下的都带有非常小的权重值，这就是粒子退化问题。为了使这一现象可控制，有一种有用的标准作为监督，这就是有效样本容量(Effective sample size)，定义如下：

$$N_{eff} = \left(\sum_{i=1}^{N}\left(\omega_t^{(i)}\right)^2\right)^{-1} \tag{3.10}$$

当所有样本有相同权值时，$N_{eff} = N$；当只有一个样本时，$N_{eff} = 1$。因此，$N_{eff}$ 越大越好。当 $N_{eff}$ 降到设定的阈值 $N_0$ 以下时，需要进行重抽样(Resample)。

**算法 1：粒子滤波 (PF) 算法**

0　初始化：独立地从 $\pi(h_0)$ 抽 $h_0^{(1)},...,h_0^{(N)}$,并且令 $\omega_0^{(i)} = N^{-1}$，$i = 1,...,N$

1　For　$t = 1,...,T$ :

1.1)For　$i = 1,...,N$

从 $g_{t|t-1}(h_t\left|h_{0:t-1}^{(i)}, y_{1:t}\right.)$ 抽取 $h_t^{(i)}$，并且令

$$h_{0:t}^{(i)} = (h_{0:t-1}^{(i)}, h_t^{(i)})$$

$$\tilde{\omega}_t^{(i)} = \frac{\pi(y_t\left|h_t^{(i)}\right.)\pi(h_t^{(i)}\left|h_{t-1}^{(i)}\right.)}{g_{t|t-1}(h_t^{(i)}\left|h_{0:t-1}^{(i)}, y_{1:t}\right.)}\omega_{t-1}^{(i)}$$

1.2)标准化权重值 $\omega_t^{(i)} = \tilde{\omega}_t^{(i)} / \sum_{j=1}^{N} \tilde{\omega}_t^{(j)}$

1.3)计算有效样本容量